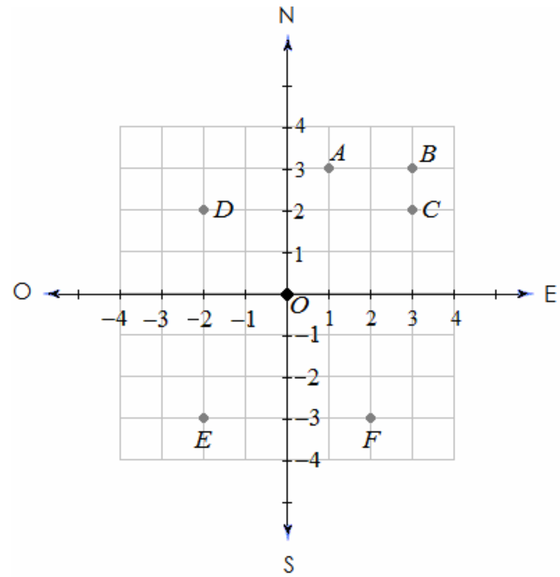
CAPITULO VI: Geometría Analítica

A. El plano cartesiano

Ejercicio Introductorio A. En el siguiente croquis, tenemos una ciudad en la que le agregamos dos rectas numéricas perpendiculares para representar las direcciones (oeste – este) y (sur – norte).



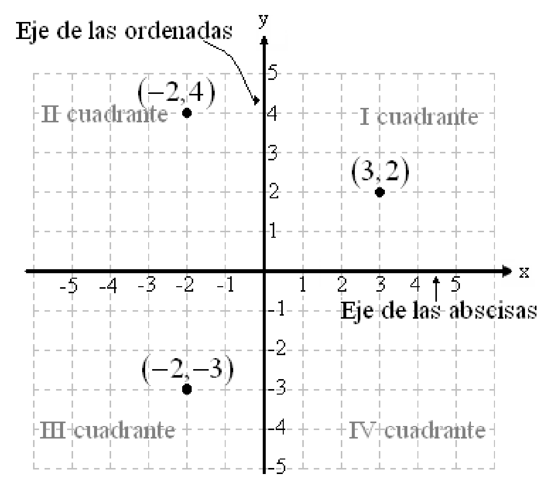
Las rectas se intersecan en un punto llamado **origen**. En la ciudad los puntos tienen el siguiente significado:

Punto	El origen: O	A	B	C	D	E	F
Representa	El colegio	El parque	La iglesia	El banco	El correo	La casa de Ana	La pulpería
Coordenadas		$(1,3)$				$(-2,-3)$	

Las **coordenadas** representan las distancias horizontales y verticales (en ese orden) del origen a ese punto. Por ejemplo, las coordenadas de A son $(1,3)$ porque para llegar a A es necesario trasladarse una unidad al este y tres al norte partiendo desde el origen.

Complete las coordenadas de cada punto en la tabla.

El **plano cartesiano** es la representación que debemos utilizar cuando tenemos parejas de números reales, y está formado por dos rectas reales perpendiculares llamados **ejes coordenados.**



El eje horizontal es llamado **eje x** o **eje de las abscisas**, formado por los puntos de la forma $(x,0)$ mientras que el eje vertical es el **eje y**, o **el eje de las ordenadas** y son los puntos de la forma $(0,y)$.

Además, los ejes dividen al plano en cuatro partes, llamadas **cuadrantes** y que se enumeran como en la figura adjunta.

Los elementos del plano cartesiano son **pares ordenados** de la forma (x,y) donde tanto x como y son números enteros (por el momento). En la figura, hemos representado algunos puntos. Tenemos que tener claro que la primer coordenada se refiere al eje x, mientras que la segunda al eje y.

La geometría analítica utiliza muchos conceptos del álgebra como ecuaciones y números negativos, solo que debemos ser consistentes: una distancia o medida no puede ser negativa, sino que podemos tener coordenadas negativas que indican un sentido de dirección nada más.

Ejercicio A.

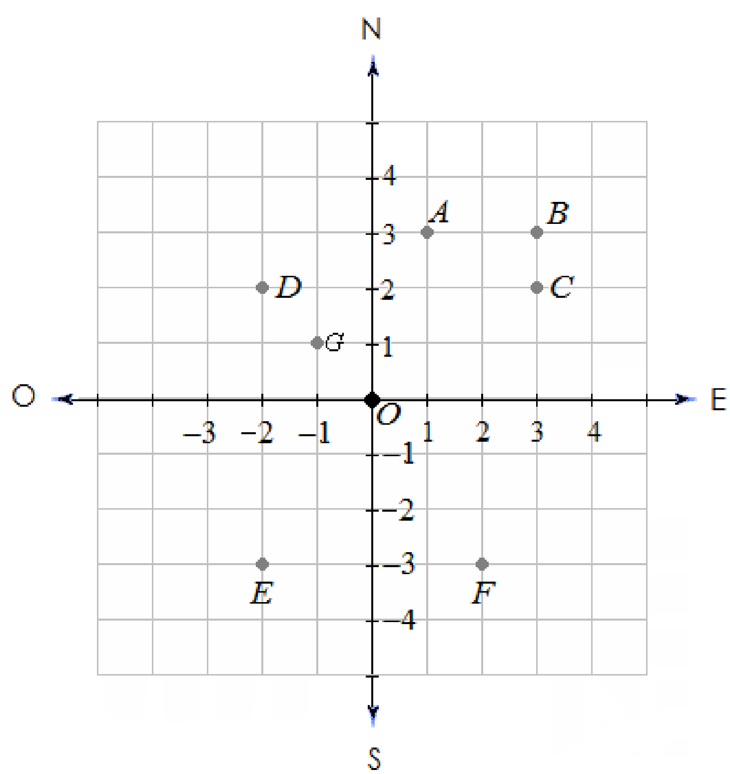
I PARTE:

1. En el croquis, señale el punto G correspondiente a la casa de Roger que tiene coordenadas $(-1,1)$.

2. Complete la información con respecto a los siguientes trayectos que se hacen siguiendo únicamente las líneas grises. (Recuerde representar los movimientos hacia al norte y hacia el este con un número positivo y los desplazamientos al sur y al oeste con un número negativo)

Trayecto:	Partimos de :	Llegamos a:	Desplazamiento horizontal:	Desplazamiento vertical:	Distancia recorrida:
Del colegio al parque	O	A	1	3	4
Del parque al banco	A	C	2	-1	3
Del banco al correo					
Del correo al colegio					
Del colegio a la casa de Ana					
De la casa de Ana a la casa de Roger					
De la casa de Roger a la pulpería					
	F	G			
	G	D			
	D		0	-5	
De la casa de Ana a otro punto señalado.			3		9
		F	1	-6	

II PARTE: Siguiendo con el mismo ejemplo en el correo se instala una antena parabólica para proveer el servicio de Internet a diferentes lugares. Supongamos, que cada cuadrado tiene una medida de $100m$ y que la señal de internet llega $300m$ a la redonda del correo.



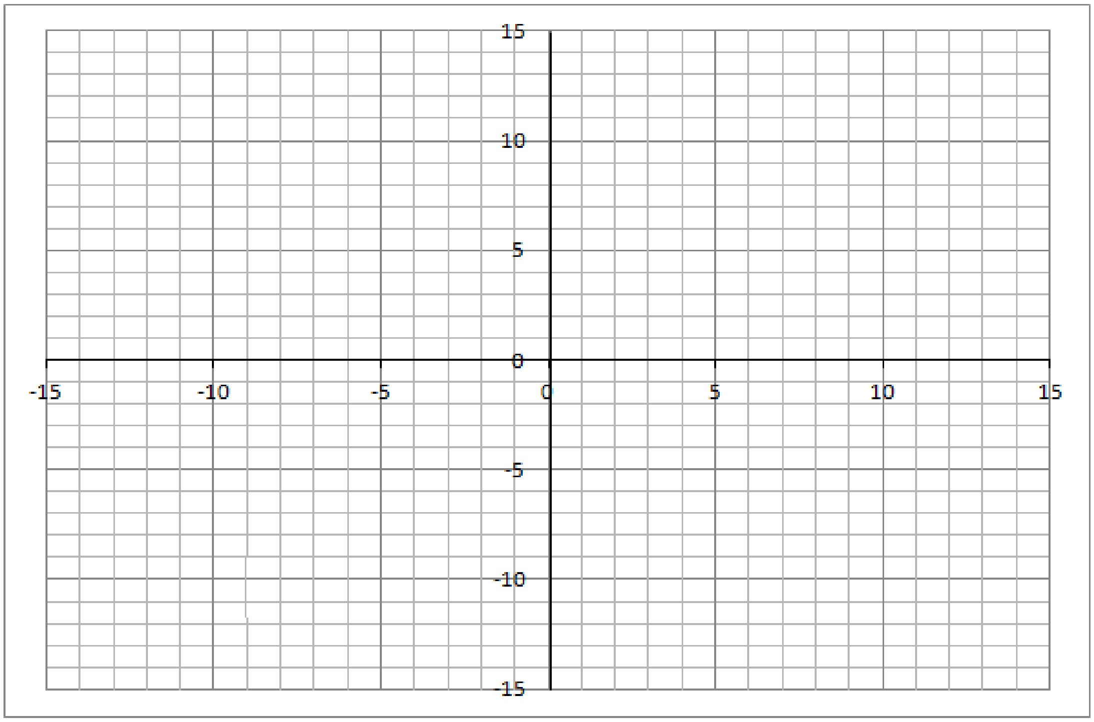
1. Trace con un compás zona que tendrá cobertura.

2. Determine a cuáles de los siguientes lugares le llega la señal de internet dada por el correo: El parque, el colegio, la iglesia, el banco y la casa de Roger.

3. Giselle está en la Iglesia, y quiere ir a la casa de Roger pero no sabe donde es exactamente. Roger le dice que se queden de ver en el punto medio entre la Iglesia y su casa. Encuentre las coordenadas del punto donde se deben encontrar.

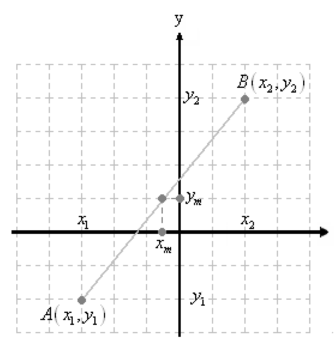
4. Sara dice que el colegio está en el punto medio entre la casa de Ana y la Iglesia, ¿es cierto?

III PARTE: En el siguiente plano cartesiano señale las siguientes parejas de puntos. Además, señale y encuentre las coordenadas del punto medio.



$A(5,10), B(-3,-5)$ $C(4,15), D(10,-8)$ $E(0,10), F(-5,8)$ $G(-10,0), H(4,0)$ $I(0,-8), J(-8,-12)$

B. Fórmula de punto medio



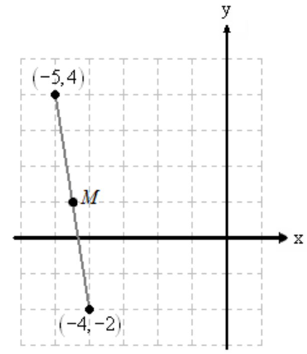
Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. El **punto medio** de $\overline{AB}$ es el punto con coordenadas: $P_m = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

EJEMPLO 1. **Encuentre el punto medio entre los puntos $(-4,-2)$ y $(-5,4)$.**

EJEMPLO 2. **Los puntos $(-2,-6)$ y $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$ son los extremos del diámetro de un círculo. Encuentre las coordenadas del centro del círculo.**

Soluciones B.

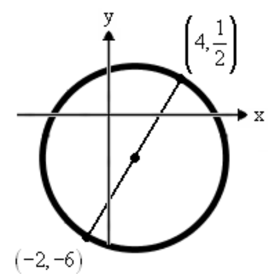
EJEMPLO 1. Encuentre el punto medio entre los puntos $(-4,-2)$ y $(-5,4)$.



Aplicando la fórmula con los puntos $\left(\underbrace{-4}_{x_1},\underbrace{-2}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{-5}_{x_2},\underbrace{4}_{y_2}\right)$ obtenemos:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{(-4)+(-5)}{2},\frac{(-2)+4}{2}\right)=\left(\frac{-9}{2},\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{-9}{2},1\right).$$

EJEMPLO 2. Los puntos $(-2,-6)$ y $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ son los extremos del diámetro de un círculo. Encuentre las coordenadas del centro del círculo.



El centro del círculo es el punto medio de los extremos del diámetro.

Aplicando la fórmula del punto medio tenemos $O=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-6+{}^{1}\!/_{2}}{2}\right)=\left(1,\frac{-11}{4}\right)$.

Ejercicio B.

I PARTE: De una descripción en términos de cuadrantes y ejes de los siguientes conjuntos.

1. $\{(x,y)/x=0\}$

2. $\{(x,y)/x<0,y>0\}$

3. $\{(x,y)/x<0,y=0\}$

4. $\{(x,y)/x<0,y<0\}$

II PARTE: Grafique los siguientes puntos. Además, encuentre y señale el punto medio.

1. $A(-3,4)$ y $B(-3,-4)$

2. $C(1,5)$ y $D(7,5)$

3. $A(-3,7)$ y $B(2,-5)$

4. $C(4,3)$ y $D(7,-2)$

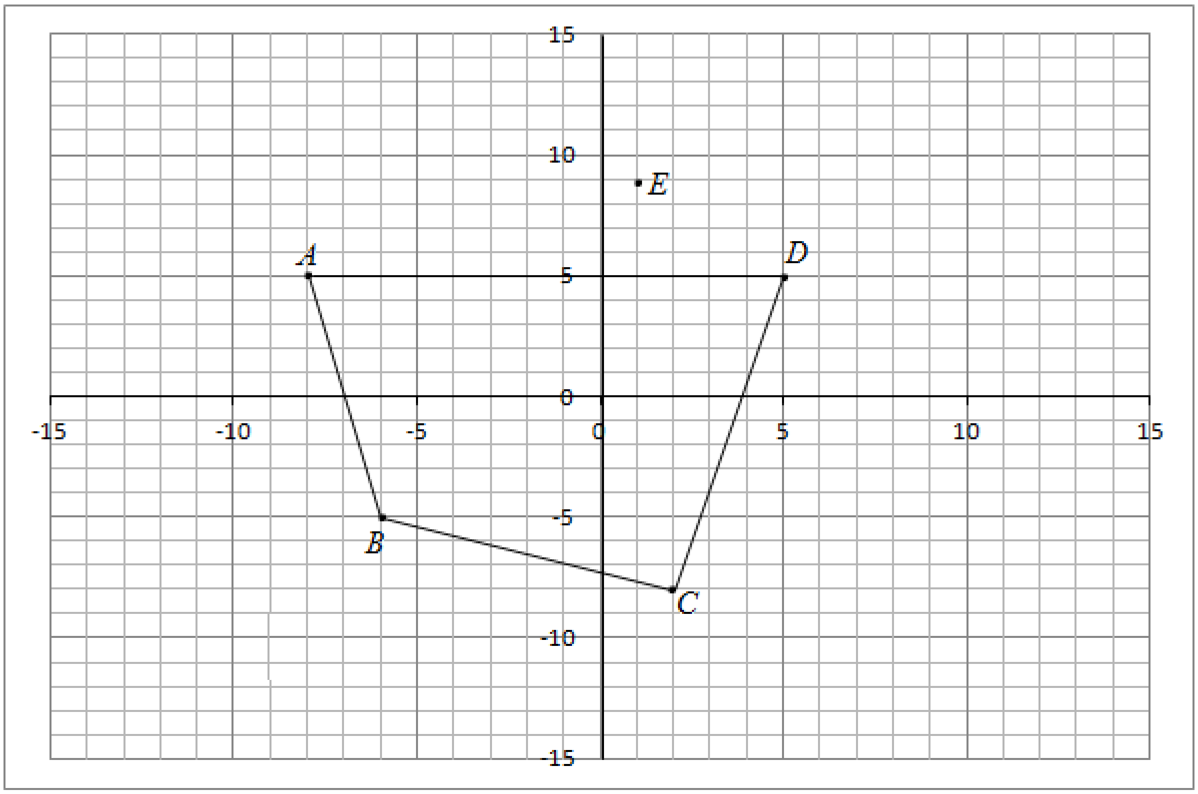
III PARTE: Los aviones $B(-5,5)$ y $C(1,1)$ están en los puntos límite de la cobertura del radar de la torre de control, y esta está justamente en el punto medio entre los aviones. ¿Cuáles de los siguientes aviones dadas sus posiciones están en la cobertura del radar que está en la torre de control $D(-4,-1), E(-3,0),\ F(1,4),\ G(-2,7)$?

C. Traslación de figuras

Dada una figura en el plano cartesiano, la traslación de esta es la figura que se forma al trasladar cada uno de sus puntos. Esto se hace como lo hicimos en los desplazamientos que vimos en la sección A.

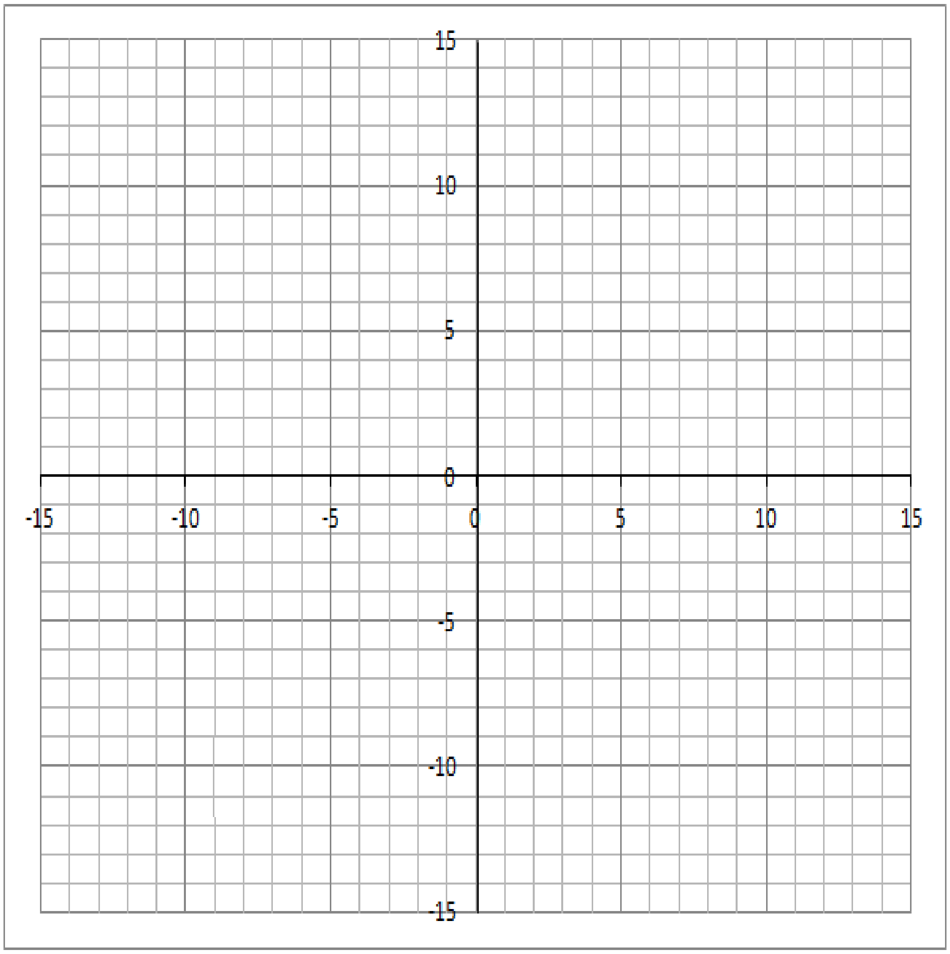
Ejercicio C.

I PARTE: Considere el siguiente plano cartesiano y el cuadrilátero $ABCD$.



1. ¿Qué desplazamiento a través de las líneas se debe hacer para llegar del punto A al punto E?
2. Encuentre las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E.
3. Traslade los puntos B, C, D a los puntos F, G, H de manera que todos se muevan igual que A se movió para llegar a E.
4. Trace de color rojo el cuadrilátero $EFGH$
5. Describa el desplazamiento que habría del punto C al punto H.
6. ¿Cuál tipo de cuadrilátero es $BFGC$?
7. Encuentre y dibuje los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$?
8. ¿Qué tipo de cuadrilátero forman esos puntos medios? Píntelo de verde.
9. Dibuje un cuadrilátero $IJKL$ congruente con $ABCD$ de manera que el punto $J(-10,-8)$ sea la traslación de B
10. ¿Es IAJ una traslación de DHG?
11. Estime el área del cuadrilátero $ABCD$.
12. Estime el área del cuadrilátero $EFGH$.
13. Sea $\{M\} = \overline{IL} \cap \overline{AB}$ y $\{N\} = \overline{LK} \cap \overline{BC}$. Encuentre el área del cuadrilátero $MBNL$.

II PARTE: Considere el siguiente plano cartesiano.



1. Señale en él los siguientes puntos $A(0,10), B(-5,-5), C(0,-10)$.
2. Señale el punto D de manera que $ABCD$ sea un paralelogramo. Píntelo de rojo.
3. El punto A se mueve dos unidades hacia arriba y tres unidades hacia la izquierda. Llame a ese punto E.
4. Se construye un paralelogramo $EFGH$ que es una traslación del primero, (es decir el primer paralelogramo se mueve dos unidades hacia arriba y tres unidades hacia la izquierda) Dibújelo y píntelo de azul.
5. ¿Los paralelogramos tienen lados y ángulos congruentes?
6. Encuentre las coordenadas de F, G y H.
7. ¿Se podrá decir que $DHGC$ es una traslación de $AEFB$?
8. ¿Qué tipo de cuadrilátero son $AEFB$ y $DHGC$?
9. Encuentre la coordenadas del punto medio de $\overline{EF}$ y del punto medio de $\overline{EG}$. Llame a esos puntos I, J.
10. Traslade el segmento $\overline{IJ}$ siete unidades hacia la derecha.
11. ¿Interseca esa traslación al segmento $\overline{IJ}$?
12. Estime el área del cuadrilátero $ABCD$.

AUTOEVALUACIÓN Geometría Analítica

I PARTE: Selección única

1) Al trasladar el punto $(-2,3)$ tres unidades a la derecha y cuatro unidades hacia abajo en el plano cartesiano, llegamos al punto:

A) $(2,-1)$

B) $(-5,7)$

C) $(1,-1)$

D) $(1,7)$

2) ¿Cuál de los siguientes puntos está sobre el eje x?

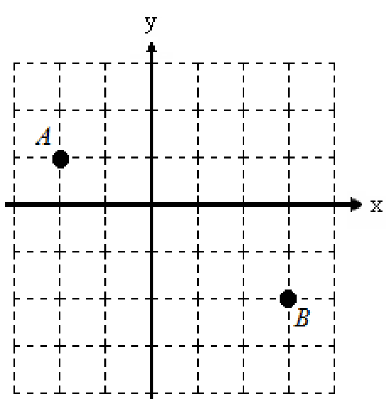
A) $(2,1)$

B) $(-3,0)$

C) $(0,5)$

D) $(1,1)$

De acuerdo con el siguiente plano cartesiano y los puntos A y B, conteste las preguntas 3-8.



3) ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

A) $(-2,1)$

B) $(2,-1)$

C) $(2,1)$

D) $(-2,-1)$

4) ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

A) $(-3,2)$

B) $(2,-3)$

C) $(3,-2)$

D) $(-2,3)$

5) Las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ corresponden a:

A) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

B) $(1,1)$

C) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

D) $(-1,1)$

6) El punto B pertenece al cuadrante:

A) I
B) II
C) III
D) IV

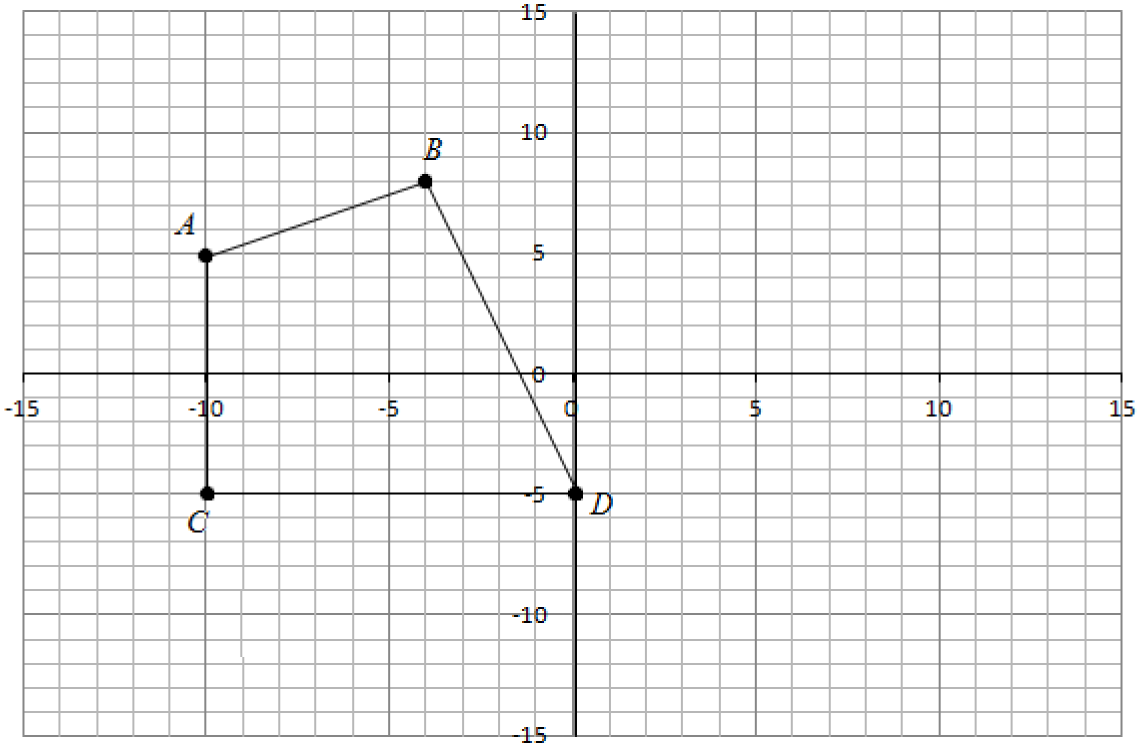
7) Considere el punto $C(2,1)$. El área de ΔABC es:

A) 3
B) $4,5$
C) 6
D) 9

8) ¿Cuál de los puntos está más lejos del origen?

A) A
B) B
C) C
D) Todos están a la misma distancia.

II PARTE: Considere el siguiente cuadrilátero en el plano cartesiano:



1. Encuentre las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

2. Estime el área del cuadrilátero $ABDC$

3. El cuadrilátero $EFGH$ es una traslación de $ABDC$ tres unidades hacia arriba y cinco unidades hacia la derecha. Dibújelo de color rojo.

4. Estime el área del cuadrilátero $CGHD$.

5. Encuentre las coordenadas de los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Trace de color verde el segmento que los une.

6. Señale con azul el punto $I(13,8)$.

7. El punto J es el punto medio del segmento $\overline{HI}$. Señale también con azul y encuentre sus coordenadas.

8. Dibuje con azul el triángulo FIJ.

9. Estime el área de ese triángulo.

10. Traslade el triángulo FIJ de manera que el punto F esté ahora en G. Píntelo de azul.